Anhang A: Die exakte dynamische Theorie

A.1 Die Mittelung der generierenden Funktion

In diesem Anhang wird

$$[Z(\underline{l})]_J = \Big[\mathrm{Tr}_{S_i(t)} \int \prod_{it} \Big\{ dh_i(t)\, \Theta\big(S_i(t+1)h_i(t)\big) \cdot \delta\big(h_i(t) - \sum_j J_{ij} S_j(t)\big) \Big\} \cdot \exp\big(i \sum_{it} l_i(t) h_i(t)\big) \Big]_J$$

im Limes $N \to \infty$ ausgewertet.

Um die Mittelung über die J_{ij}'s durchzuführen, stellen wir zunächst die internen Felder $\sum J_{ij} S_j(t)$ durch Entwicklungskoeffizienten $a_\mu(t)$ nach den Mustern ξ_i^μ dar.

Da die pseudoinverse Kopplungsmatrix J_{ij} bis auf die fehlende Diagonale identisch dem Projektionsoperator $\mathcal{P}$ ist, gilt

- $\mathcal{P} \cdot \underline{S}$ ist eine Linearkombination der Muster, und
- $(\mathbb{1} - \mathcal{P}) \cdot \underline{S}$ liegt im Orthogonalraum der Muster.

Mit $\mathcal{P}_{ii} \to \alpha$ für $N \to \infty$ (siehe Anhang B), stellt sich die erste Bedingung als

$$\forall_i: \qquad h_i(t) + \alpha S_i(t) = a_1 + N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu > 1} a_\mu(t) \xi_i^\mu$$

dar. Damit sind die Entwicklungskoeffizienten bereits $a_\mu(t)$ festgelegt. Es wurde hier schon berücksichtigt, daß der Überlapp zum Muster 1 von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist, während der Überlapp zu den restlichen Mustern nur die Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{N}})$ haben soll.

Zur vollständigen Festlegung der internen Felder sind noch die Komponenten im Orthogonalraum der Muster zu spezifizieren. Dies geschieht durch die zweite Bedingung, die wir als

$$\forall_\mu: \qquad N^{-1/2} \sum_i \xi_i^\mu \Big[h_i(t) - (1-\alpha) S_i(t)\Big] = 0 \tag{A.1}$$

schreiben können.

Die Transformation auf die neuen Variablen führt nach kurzer Rechnung zu

$$\begin{aligned} Z(\underline{l}) = \mathrm{Tr}_{S_i(t)} \int Dh\, D\widehat{h}\, Da\, D\widehat{a} \cdot \det\big(C_{\mu\nu}\big) \cdot \prod_{it} \Big\{ \Theta\big(S_i(t+1) h_i(t)\big) \\ \cdot \delta\Big(N^{-1} \sum_i \big\{h_i(t) - (1-\alpha) S_i(t)\big\}\Big)\Big\} \\ \cdot \exp\Big(i \sum_{it} l_i(t) h_i(t) + L\big[h(t), \widehat{h}(t), a(t), \widehat{a}(t)\big]\Big) . \end{aligned} \tag{A.2}$$

Hierbei ist der Term $\det(C_{\mu\nu})$ in (A.2) die Funktionaldeterminante unserer Transformation. Sie sorgt dafür, daß weiterhin $Z(\underline{0}) = 1$ gilt.

Es ist

$$
\begin{aligned}
L\big[h(t), \widehat{h}(t), a(t), \widehat{a}(t)\big] \; = \; & \\
& i \sum_{it} \widehat{h}_i(t) \Big\{ h_i(t) + \alpha S_i(t) - a_1(t) - N^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu>1} a_\mu(t) \xi_i^\mu \Big\} \\
& + i \sum_{\mu>1,t} \widehat{a}_\mu(t) \Big\{ N^{-\frac{1}{2}} \sum_i \xi_i^\mu \left\{ h_i(t) - (1-\alpha) S_i(t) \right\} \Big\}
\end{aligned}
$$

und das Integralsymbol steht als Abkürzung für

$$
\int Dh \; D\widehat{h} \; Da \; D\widehat{a} = \int \prod_{it} \{ dh_i(t) d\widehat{h}_i(t) \} \prod_{\mu t} da_\mu(t) \prod_{\substack{\mu t \\ \mu>1}} d\,\widehat{a}_\mu(t) \; .
$$

$Z(\underline{l})$ kann in obiger Form über die Muster gemittelt werden. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
L \; = \; & L_0 - \frac{1}{2N} \sum_{\substack{i\mu t\tau \\ \mu>1}} \Big[\widehat{h}_i(t) \widehat{h}_i(\tau) a_\mu(t) a_\mu(\tau) \\
& + \widehat{a}_\mu(t) \widehat{a}_\mu(\tau) f_i(t) f_i(\tau) - 2\, \widehat{h}_i(t) f_i(\tau) a_\mu(t) \widehat{a}_\mu(\tau) \Big] \; ,
\end{aligned}
$$

wobei wir die neue Abkürzung

$$
f_i(t) = h_i(t) - (1-\alpha) S_i(t)
$$

eingeführt haben. Der Vektor $f_i(t)$ stellt (vergl. (A.1)) die Projektion des Spinvektors $S_i(t)$ in den Orthogonalraum der Muster dar.

L_0 ist der bereits faktorisierte Teil von L:

$$
L_0 = i \sum_{it} \widehat{h}_i(t) \Big\{ h_i(t) + \alpha S_i(t) - a_1(t) \Big\} \; .
$$

Die anderen Summen in L können mittels der Identitäten

$$
\begin{aligned}
1 \; &= \; \int \prod_{t\tau} \left\{ \frac{N\, dU_{t\tau} d\widehat{U}_{t\tau}}{2\pi} \exp\Big(i\, N \widehat{U}_{t\tau} U_{t\tau} - i \widehat{U}_{t\tau} \sum_{\mu>1} a_\mu(t) a_\mu(\tau) \Big) \right\} , \\
1 \; &= \; \int \prod_{t\tau} \left\{ \frac{N\, dC_{t\tau} d\widehat{C}_{t\tau}}{2\pi} \exp\Big(i\, N \widehat{C}_{t\tau} C_{t\tau} - i \widehat{C}_{t\tau} \sum_{i} f_i(t) f_i(\tau) \Big) \right\} , \\
1 \; &= \; \int \prod_{t\tau} \left\{ \frac{N\, dK_{t\tau} d\widehat{K}_{t\tau}}{2\pi} \exp\Big(-\, N \widehat{K}_{\tau t} K_{t\tau} - i \widehat{K}_{\tau t} \sum_{\mu>1} a_\mu(t)\; i\, \widehat{a}_\mu(\tau) \Big) \right\} .
\end{aligned}
$$

entkoppelt werden.

Wir erhalten damit $\left[Z(\underline{l}) \right]_J$ in der Form

$$
\begin{aligned}
\left[Z(\underline{l}) \right]_J \; = \; & \int \prod_{t\tau} \left\{ \frac{N\, dU_{t\tau} d\widehat{U}_{t\tau}}{2\pi} \frac{N\, dC_{t\tau} d\widehat{C}_{t\tau}}{2\pi} \frac{N\, dK_{t\tau} d\widehat{K}_{t\tau}}{2\pi} \right\} \\
& \cdot \exp\Big(F\big(U, \widehat{U}, C, \widehat{C}, K, \widehat{K}\big) \Big)
\end{aligned}
$$

wobei

$$F = iN \sum_{t\tau} \{\widehat{U}_{t\tau} U_{t\tau} + \widehat{C}_{t\tau} C_{t\tau} + i\widehat{K}_{\tau t} K_{t\tau}\} + \ln\left(\widetilde{Z}(U, \widehat{U}, C, \widehat{C}, K, \widehat{K})\right) ,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Z} &= \left[\det(C_{\mu\nu})\right]_J \cdot \mathrm{Tr}_{S_i(t)} \int Dh\, D\widehat{h}\, Da\, D\widehat{a} \\ &\quad \cdot \prod_{it} \left\{\delta(N^{-1} \sum_i h_i(t) - (1-\alpha) S_i(t)) \cdot \Theta\big(S_i(t+1) h_i(t)\big)\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left(\widetilde{L}[h, \widehat{h}, a, \widehat{a}, m, S, U, \widehat{U}, C, \widehat{C}, K, \widehat{K}]\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{L} &= L_0 - 1/2 \sum_{t\tau} \Big(U_{t\tau} \sum_i \widehat{h}_i(t) \widehat{h}_i(\tau) \\ &\qquad + C_{t\tau} \sum_{\mu>1} \widehat{a}_\mu(t) \widehat{a}_\mu(\tau) + 2K_{t\tau} \sum_i i\widehat{h}_i(t) f_i(\tau)\Big) \\ &\quad - i \sum_{t\tau} \Big(\widehat{U}_{t\tau} \sum_{\mu>1} a_\mu(t) a_\mu(\tau) + \widehat{C}_{t\tau} \sum_i f_i(t) f_i(\tau) \\ &\qquad + \widehat{K}_{\tau t} \sum_{\mu>1} a_\mu(t)\, i\widehat{a}_\mu(\tau)\Big) \end{aligned}$$

ist. Hierbei wurde ausgenutzt, daß die Größe $\left[\det(C_{\mu\nu})\right]_J$ selbstmittelnd ist [Ku90].

Im Limes $N \to \infty$ können die Integrale in $\left[Z(\underline{l})\right]_J$ mit Hilfe einer Sattelpunkts-integration ausgewertet werden. Die Integrationsvariablen nehmen dabei ihre Werte an den Sattelpunkten von F an:

$$\widehat{U}_{t\tau} = -\frac{i}{2N} \sum_i \left\langle \widehat{h}_i(t) \widehat{h}_i(\tau) \right\rangle_{\tilde{Z}} , \tag{A.3}$$

$$U_{t\tau} = N^{-1} \sum_{\mu>1} \left\langle a_\mu(t) a_\mu(\tau) \right\rangle_{\tilde{Z}} , \tag{A.4}$$

$$\widehat{C}_{t\tau} = -\frac{i}{2N} \sum_\mu \left\langle \widehat{a}_\mu(t)\, \widehat{a}_\mu(\tau) \right\rangle_{\tilde{Z}} , \tag{A.5}$$

$$C_{t\tau} = N^{-1} \sum_i \left\langle f_i(t)\, f_i(\tau) \right\rangle_{\tilde{Z}} , \tag{A.6}$$

$$\widehat{K}_{t\tau} = -N^{-1} \sum_i \left\langle i\widehat{h}_i(\tau)\, f_i(t) \right\rangle_{\tilde{Z}} , \tag{A.7}$$

$$K_{t\tau} = N^{-1} \sum_\mu \left\langle a_\mu(t)\, i\widehat{a}_\mu(\tau) \right\rangle_{\tilde{Z}} . \tag{A.8}$$

Zwei der Sattelpunktsgleichungen ((A.3) und (A.5)) besitzen die triviale Lösung $\widehat{U}_{t\tau} = \widehat{C}_{t\tau} = 0$. Eine andere Lösung dieser Sattelpunktsgleichungen würde die Normierung von $\overline{Z(\underline{0})}$ verletzen (vergl. auch [So82]).

Den übriggeblieben Teil von $\widetilde{L}$ entkoppeln wir nun im nächsten Schritt durch die Einführung von Gaußschen Zufallsfelder $w_i(t)$ und $v_\mu(t)$. Beide haben den Mittelwert null und die Varianzen

$$\left[w_i(t) w_i(\tau)\right] = U_{t\tau}$$

sowie

$$\Big[v_\mu(t)v_\mu(\tau)\Big] = C_{t\tau} \; .$$

Wir nützen hierbei aus, daß für gaußverteilte Zufallsvariable ξ_i, die den Mittelwert null besitzen, gilt

$$\Big[\exp\big(-i\sum_i x_i\xi_i\big)\Big]_{\underline{\xi}} = \exp\big(-\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \left[\xi_i\xi_j\right]_{\underline{\xi}}\big) \; .$$

Dies folgt zwanglos aus der Kumulantenentwicklung der linken Gleichungsseite. $\widetilde{L}$ transformiert sich damit zu

$$\begin{aligned} \widetilde{L} \;=\;& i\sum_{it}\Big(\widehat{h}_i(t)\Big\{h_i(t)+\alpha S_i(t)-\sum_\tau K_{t\tau}f_i(\tau)-w_i(t)-a_1(t)\Big\}\Big) \\ &+ i\sum_{\mu t}\Big(\widehat{a}_\mu(t)\Big\{\sum_\tau \widehat{K}_{\tau t}a_\mu(\tau)-v_\mu(t)\Big\}\Big) \; . \end{aligned} \tag{A.9}$$

Die erzeugende Funktion kann jetzt in der Form

$$\begin{aligned} \Big[Z(\underline{l})\Big]_J \;=\;& \Big[\mathrm{Tr}_{S_i(t)}\int Dh\; Da\;\cdot\prod_{it}\Big\{\Theta\big(S_i(t+1)h_i(t)\big) \\ &\cdot\delta\big(N^{-1}\sum_i h_i(t)-(1-\alpha)S_i(t)\big)\Big\}\cdot\exp\Big(i\sum_{it}l_i(t)h_i(t)\Big) \\ &\cdot\prod_{it}\Big\{\delta\big(h_i(t)+\alpha S_i(t)-w_i(t)-\sum_\tau K_{t\tau}f_i(\tau)-a_1(t)\big)\Big\} \\ &\cdot\prod_{\mu>1,t}\Big\{\delta\big(\sum_\tau \widehat{K}_{t\tau}a_\mu(\tau)-v_\mu(t)\big)\Big\}\Big]_{\underline{w},\underline{v}} \\ \equiv\;& \Big[\bar{Z}(\underline{l})\Big]_{\underline{w},\underline{v}} \end{aligned}$$

geschrieben werden.

Dies stellt die Beschreibung von N unabhängigen Ein–Neuronen–Systemen mit den dynamischen Gleichungen

$$S_i(t+1) = \mathrm{sign}\big(h_i(t)\big) \; , \tag{A.10}$$

$$h_i(t)+\alpha S_i(t) = a_1(t)+\sum_\tau K_{t\tau}f_i(\tau)+w_i(t) \; , \tag{A.11}$$

$$f_i(t) = h_i(t)-(1-\alpha)S_i(t) \; , \tag{A.12}$$

$$v_\mu(t) = \sum_\tau \widehat{K}_{t\tau}a_\mu(\tau) \tag{A.13}$$

dar. Zusätzlich gilt noch

$$N^{-1}\sum_i f_i(t) = 0 \; . \tag{A.14}$$

A.2 Die ersten Zeitschritte

A.2.1 Vereinfachung der dynamischen Gleichungen

Zunächst erhalten wir durch Mittelung von (A.11) über den Index i mit (A.14)

$$a_1(t) = N^{-1}\sum_i S_i(t) \equiv m(t) \; .$$

Weiterhin können wegen Gleichung (A.9) die Gleichungen (A.7) und (A.8) auch als

$$\widehat{K}_{t\tau} = \Big[\frac{\partial f_i(t)}{\partial w_i(\tau)}\Big] , \tag{A.15}$$

$$K_{t\tau} = -\alpha\Big[\frac{\partial a_\mu(t)}{\partial v_\mu(\tau)}\Big] . \tag{A.16}$$

dargestellt werden.

Mit (A.16) folgt nun aus (A.13)

$$\sum_\tau \widehat{K}_{t_1\tau}K_{\tau t_2} = -\alpha\delta_{t_1t_2}$$

und damit auch

$$a_\mu(t) = -\alpha^{-1}\sum_\tau K_{t\tau}v_\mu(\tau)$$

Aus (A.11) folgt sodann unter Zuhilfenahme von (A.15), daß

$$\widehat{K}_{t\tau} = -\Big[\frac{\partial S_i(t)}{\partial w_i(\tau)}\Big] + (1-\alpha)\delta_{t\tau}$$

ist. Also auch

$$\widehat{K}_{tt} = 1-\alpha .$$

Da aus Kausalitätsgründen für $\tau > t$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{t\tau} &= 0 , \\ K_{t\tau} &= 0 \end{aligned}$$

gilt, sind $\widehat{K}_{t\tau}$ und $K_{t\tau}$ sind untere Dreiecksmatrizen. Es folgt deshalb

$$K_{tt} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} .$$

Die letzte Gleichung erlaubt uns schließlich, Gleichung (A.11) als

$$h_i(t) = \big(1-\alpha\big)\Big\{m(t) + \sum_{\tau<t} K_{t\tau}f_i(\tau) + w_i(t)\Big\} \tag{A.17}$$

zu schreiben.

A.2.2 Entgültige Form der dynamischen Gleichungen

Zur Referenz werden hier alle dynamischen Gleichungen in vereinfachter Form zusammengestellt. Da die N Ein–Neurone–Systeme nicht untereinander koppeln, lassen wir im folgenden die Indices i und μ weg. Die Mittelungen werden im weiteren generell durch "$\overline{\quad\quad}$" angezeigt. Wir erhalten damit die dynamischen Gleichungen in der Form

$$S_{t+1} = \mathrm{sign}\big(h_t\big) , \tag{A.18}$$

$$h_t = \big(1-\alpha\big)\Big\{m_t + \sum_{\tau<t} K_{t\tau}f_\tau + w_t\Big\} , \tag{A.19}$$

$$f_t = h_t - (1-\alpha)S_t , \tag{A.20}$$

$$a_t = -\alpha^{-1}\sum_\tau K_{t\tau}v_\tau ; \tag{A.21}$$

zusätzlich sind die Matrizen $\widehat{K}_{t\tau}$ und $K_{t\tau}$ über

$$\sum_{\tau} \widehat{K}_{t_1\tau} K_{\tau t_2} = -\alpha \delta_{t_1 t_2} \tag{A.22}$$

und

$$\widehat{K}_{t\tau} = \overline{\frac{\partial S_t}{\partial w_\tau}} + (1-\alpha)\delta_{t\tau} \tag{A.23}$$

festgelegt.

Für die Korrelationen der gaußschen Rauschterme gilt

$$\begin{aligned} \overline{w_t w_\tau} &= \alpha \overline{a_t a_\tau} \\ &= \alpha^{-1} \sum_{t',\tau'} K_{tt'} K_{\tau\tau'} \, \overline{v_{t'} v_{\tau'}} \ , \end{aligned} \tag{A.24}$$

und

$$\overline{v_t v_\tau} = \overline{f_t f_\tau} \ . \tag{A.25}$$

A.2.3 Struktur des internen Feldes zu beliebigen Zeiten

Wir können Gleichung (A.17) expandieren, um die Struktur des internen Feldes zu einem beliebigen Zeitpunkt zu erhalten. Fassen wir $m_t + w_t$ zu einer neuen Variablen z_t zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} h_t &= (1-\alpha)\Big\{ z_t + \sum_{t_1<t} K_{tt_1} f_{t_1} \Big\} \\ &= (1-\alpha)\, z_t + (1-\alpha) \sum_{t_1<t} K_{tt_1} \Big\{ h_{t_1} - (1-\alpha)\, S_{t_1} \Big\} \\ &= (1-\alpha)\, z_t \\ &\quad + (1-\alpha) \sum_{t_1<t} K_{tt_1} \Big\{ (1-\alpha)(z_{t_1} - S_{t_1}) + (1-\alpha) \sum_{t_2<t_1} K_{t_1t_2} f_{t_2} \Big\} \\ &= (1-\alpha)\, z_t \\ &\quad + (1-\alpha)^2 \sum_{t_1<t} K_{tt_1}(z_{t_1} - S_{t_1}) + (1-\alpha)^2 \sum_{t_2<t_1<t} K_{tt_1} K_{t_1t_2} f_{t_2} \\ &= (1-\alpha)\, z_t \\ &\quad + (1-\alpha)^2 \sum_{t_1<t} K_{tt_1} \big(z_{t_1} - S_{t_1} \big) \\ &\quad + (1-\alpha)^3 \sum_{t_2<t_1<t} K_{tt_1} K_{t_1t_2} \big(z_{t_2} - S_{t_2} \big) \\ &\quad\ \vdots \\ &\quad + (1-\alpha)^{(k+1)} \sum_{t_k<t_{k-1}<\ldots<t_2<t_1<t} K_{tt_1} K_{t_1t_2} \ldots K_{t_{k-1}t_k} \big(z_{t_k} - S_{t_k} \big) \\ &\quad\ \vdots \\ &\quad + (1-\alpha)^{(t+1)} K_{tt-1} K_{t-1t-2} \ldots K_{10} \big(z_0 - S_0 \big) \ , \end{aligned} \tag{A.26}$$

Das interne Feld h_t setzt sich also zusammen aus einer gewichteten Summe von gaußverteilten Rauschtermen z_τ und ± 1–verteilten Zufallsgrößen S_τ. Die daraus resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung von h_t kann äußerst kompliziert sein, da die z_τ's und die S_τ's sowohl unter– als auch miteinander korreliert sind.

A.2.4 Die ersten drei Zeitschritte

Der erste Zeitschritt

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind die Verhältnisse noch einfach. Nach Gleichung (A.26) hat h_0 die Struktur

$$h_0 = (1-\alpha)\,(m_0 + w_0)$$

wobei w_0 eine gaußverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert null ist. Um ihre Varianz $\overline{\Delta w_0^2}$ zu bestimmen, benutzen wir Gleichung (A.24):

$$\begin{aligned}\overline{w_0^2} &= \frac{1}{\alpha} K_{00}^2\,\overline{f_0^2}\\ &= \alpha\left\{\overline{w_0^2} + 1 - m_0^2\right\}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\overline{\Delta w_0^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(1-m_0^2)\;.$$

Also ist $P_0(h)$ eine Gauß–Verteilung mit Mittelwert

$$\overline{h_0} = (1-\alpha)\,m_0$$

und Varianz

$$\overline{\Delta h_0^2} = \alpha(1-\alpha)\cdot(1-m_0^2)\;.$$

Der zweite Zeitschritt

Bereits der zweite Zeitschritt ist wesentlich komplizierter zu behandeln; h_t hat laut (A.26) die folgende Struktur:

$$h_1 = (1-\alpha)\left\{m_1 + w_1 + (1-\alpha)K_{10}\big((m_0 + w_0 - S_0)\big)\right\}. \tag{A.27}$$

Da S_0 nicht mit den beiden Gaußschen Rauschtermen w_1 und w_0 korreliert ist, können wir Gleichung (A.27) zu

$$h_1 = z + d_1 \cdot S_0 \tag{A.28}$$

vereinfachen.

Dabei ist z eine neue gaußverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert

$$\overline{z} = (1-\alpha)\left\{m_1 + (1-\alpha)K_{10}m_0\right\}$$

und Varianz

$$\overline{\Delta z^2} = \overline{\Delta h_1^2} - d_1^2\,(1-m_0^2)\;,$$

unkorreliert zu S_0. $P_1(h)$ stellt sich somit als Summe zweier Gaußverteilungen dar, die symmetrisch um den Punkt $\overline{z}$ im Abstand von jeweils $\pm d_1$ zentriert liegen. Da $\overline{S_0} = m_0$ ist, sind relativen Amplituden der beiden Gaußverteilungen durch $(1+m_0)/2$ bzw. $(1-m_0)/2$ gegeben.

d_1 folgt aus

$$d_1 = -(1-\alpha)^2 K_{10}$$

Mit (A.23) erhalten wir zunächst

$$\widehat{K}_{10} = -2(1-\alpha)P_0(0)$$

und daraus mittels (A.22)

$$K_{10} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\,\widehat{K}_{10} = -2\frac{\alpha}{1-\alpha}\,P_0(0)\;.$$

Damit ergibt sich d_1 schließlich zu

$$d_1 = 2\alpha(1-\alpha)P_0(0)\;.$$

Für das 2. Moment der Feldverteilung erhalten wir zunächst

$$\overline{\Delta h_1^2} = (1-\alpha)^2\Big\{\overline{w_1^2} + 2(1-\alpha)K_{10}\,\overline{w_0 w_1} + (1-\alpha)^2\,\overline{w_0^2} + (1-\alpha)\,(1-m_0^2)\Big\}\;.$$

Von den auftretenden Korrelationen bestimmen wir als erstes $\overline{w_0 w_1}$. Nach (A.24) gilt

$$\begin{aligned}\overline{w_0 w_1} &= \alpha\,\overline{a_0 a_1}\\ &= \frac{1}{\alpha}\Big\{K_{00}K_{11}\,\overline{v_0 v_1} + K_{00}K_{10}\,\overline{v_0^2}\Big\}\\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\overline{v_0 v_1} - \frac{K_{10}}{1-\alpha}\,\overline{v_0^2}\;.\end{aligned}$$

Mit (A.25) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\overline{v_0 v_1} &= \overline{f_0 f_1}\\ &= (1-\alpha)^2\Big\{\overline{w_0 w_1} + (1-\alpha)K_{10}\,\overline{w_0^2} - \overline{w_0 S_1}\\ &\qquad - m_0 m_1 + (1-\alpha)K_{10}(1-m_0^2)\Big\}\;.\end{aligned}$$

$\overline{w_0 S_1}$ ergibt sich schließlich zu

$$\overline{w_0 S_1} = \overline{w_0\,\mathrm{sign}\big((1-\alpha)\,(m_0+w_0)\big)} = \frac{\overline{|h_0|}}{1-\alpha} - m_0 m_1\;.$$

Damit finden wir für die Korrelation $\overline{w_0 w_1}$:

$$\overline{w_0 w_1} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\overline{|h_0|} - K_{10}(1-m_0^2)\;.$$

Wenden wir uns nun $\overline{w_1^2}$ zu. Wegen (A.24) gilt

$$\overline{w_1^2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\,\overline{v_1^2} + K_{10}\frac{2}{1-\alpha}\,\overline{|h_0|} + K_{10}^2\,\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\big(1-m_0^2\big)\;.$$

Da

$$\overline{v_1^2} = \overline{f_1^2} = \overline{h_1^2} - 2(1-\alpha)\,\overline{h_1 S_1} + (1-\alpha)^2$$

ist, muß noch die Korrelation zwischen h_1 und S_1 bestimmt werden. Es ergibt sich durch Einsetzen von (A.27)

$$\overline{h_1 S_1} = (1-\alpha)\Big\{m_1^2 + \overline{w_1 S_1} + K_{10}\,\overline{|h_0|}\Big\}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\overline{w_1 S_1} &= \overline{w_1\,\mathrm{sign}\big(h_0\big)}\\ &= 2\,\overline{\delta(h_0)}\cdot\overline{w_1 h_0}\\ &= 2P_0(0)\,(1-\alpha)\,\overline{w_1 w_0}\\ &= -\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\,K_{10}\,\overline{w_1 w_0}\;.\end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß für gaußverteilte Zufallsvariable x_i und eine Funktion $f(\underline{x})$ gilt:

$$\overline{x_i\, f(\underline{x})} = \sum_k \overline{\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k}}\; \overline{x_k\, x_i}\ .$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\begin{aligned}\overline{w_1^2} &= \overline{h_1^2} - 2(1-\alpha)\Big\{(1-\alpha)\, m_1^2 + 2(1-\alpha) m_0 m_1 \\ &\quad + \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha}(1-2\alpha) K_{10}(1-m_0^2)\Big\} + (1-\alpha)^2\ .\end{aligned}$$

und daraus schließlich

$$\begin{aligned}\overline{\Delta h_1^2} &= \alpha(1-\alpha)\cdot(1-m_1^2) - (1-2\alpha)\Big\{2(1-\alpha)K_{10} m_0 m_1 \\ &\quad + (1-2\alpha)\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha} K_{10}^2 (1-m_0^2)\Big\}\ . \qquad \text{(A.29)}\end{aligned}$$

Damit sind alle Kenngrößen der Feldverteilung zum zweiten Zeitpunkt bestimmt.

Es sei an dieser Stelle kurz darauf hingewiesen, daß nach Gleichung (A.29) $\overline{\Delta h_1^2}$ für $\alpha = 1/2$ nur von m_1 abhängt. Dies ist ein allgemein gültiges Resultat: Für $\alpha = 1/2$ gilt immmer $\overline{\Delta h_t^2} = \frac{1}{4}\cdot(1-m_t^2)$ (siehe Anhang B).

Der dritte Zeitschritt

Der dritte Zeitschritt soll hier nur für die speziellen Parameterwerte $\alpha = 1/2$ und $m_0 = 0$ behandelt werden. Mit (A.26) folgt zunächst im allgemeinen Falle für das interne Feld

$$\begin{aligned}h_2 \;=\;& (1-\alpha)\, w_2 \\ &+ (1-\alpha)^2 K_{21}\,\big(w_1 - S_1\big) \\ &+ (1-\alpha)^2 \Big\{(1-\alpha)K_{21}K_{10} + K_{20}\Big\}\big(w_0 - S_0\big)\ .\end{aligned}$$

K_{10} ist bereits bekannt, K_{21} und K_{20} zu berechnen. Aus (A.22) erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\widehat{K}_{20} + K_{10}\widehat{K}_{21} + (1-\alpha)\, K_{20} &= 0\ , \\ -\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\widehat{K}_{21} + (1-\alpha)\, K_{21} &= 0\ .\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{20} &= -\overline{\frac{\partial S_2}{\partial w_0}} = -\overline{2\delta(h_1)\,\frac{\partial h_1}{\partial w_0}} \\ &= -2P_1(0)\,(1-\alpha)^2\, K_{10}\end{aligned}$$

und analog

$$\widehat{K}_{21} = -\overline{\frac{\partial S_2}{\partial w_1}} = -2P_1(0)\,(1-\alpha)\ .$$

Es folgt

$$K_{20} = 2P_1(0)\,(1-\alpha)\, K_{10}$$

und schließlich

$$K_{21} = -\frac{2\alpha}{1-\alpha} P_1(0)\ .$$

Damit erhalten wir dann

$$(1-\alpha)K_{21}K_{10} + K_{20} = 2K_{10}\,P_1(0)\,\big\{1-2\alpha\big\}\ .$$

Für $\alpha = 1/2$ hat daher unser Feld die einfachere Form

$$h_2 = (1-\alpha)\,w_2 + (1-\alpha)^2\,K_{21}\,\big(w_1 - S_1\big)\ ,$$

die sich wieder zu

$$h_2 = \widetilde{w} + \widetilde{d}\cdot S_1 \tag{A.30}$$

mit dem gaußschen Rauschterm

$$\widetilde{w} = (1-\alpha)\,w_2 + (1-\alpha)^2\,K_{21}\,w_1$$

und

$$\widetilde{d} = -(1-\alpha)^2\,K_{21}$$

zusammenfassen lassen. Wegen der Korrelation zwischen S_1 und w_1 führt allerdings Gleichung (A.30) *nicht* zu einer Doppelgauß–Struktur. Vielmehr ergibt sich mit der Verbundwahrscheinlichkeit $P(\widetilde{w}, h_0)$, einer zweidimensionalen Gaußverteilung, die Feldverteilung zum dritten Zeitschritt zu

$$\begin{aligned} P_2(h) &= \int d\widetilde{w}\,dh_0\,\delta\Big(h - \big\{\widetilde{w} + \widetilde{d}\cdot\mathrm{sign}(h_0)\big\}\Big)\,P(\widetilde{w}, h_0) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\overline{\Delta\widetilde{w}^2}}}\Bigg\{\Big[1+\mathrm{erf}\big(\Delta_+(h)\big)\Big]\exp\Bigg(-\frac{1}{2}\frac{(h-\widetilde{d})^2}{\overline{\Delta\widetilde{w}^2}}\Bigg) \\ &\qquad + \Big[1+\mathrm{erf}\big(\Delta_-(h)\big)\Big]\exp\Bigg(-\frac{1}{2}\frac{(h+\widetilde{d})^2}{\overline{\Delta\widetilde{w}^2}}\Bigg)\Bigg\}\ , \end{aligned}$$

wobei $\Delta_\pm(h)$ durch

$$\Delta_\pm(h) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\,\frac{\rho(h\mp\widetilde{d})}{\sqrt{\overline{\Delta\widetilde{w}^2}}}$$

gegeben ist. ρ ist hierbei, wie üblich, der Korrelationskoeffizient

$$\rho = \frac{\overline{\Delta\widetilde{w}\,\Delta h_0}}{\sqrt{\overline{\Delta\widetilde{w}^2}\;\overline{\Delta h_0^2}}}\ . \tag{A.31}$$

Die Berechnung der Kenngrößen der Verteilung, ρ und $\overline{\Delta\widetilde{w}^2}$, vereinfacht sich nun erheblich durch die Beschränkung auf $\alpha = 1/2$ und $m_0 = 0$. Wie man zeigen kann, gilt dann nämlich $\overline{h_t\,h_\tau} = \frac{1}{4}\,\overline{S_t\,S_\tau}$ (Anhang B). Damit erhalten wir zunächst

$$\overline{\Delta h^2} = \frac{1}{4} = \overline{\Delta\widetilde{w}^2} + \widetilde{d}^2 + 2\widetilde{d}\;\overline{\widetilde{w}\,\mathrm{sign}(h_0)}\ , \tag{A.32}$$

dann

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{w}\,\mathrm{sign}(h_0)} &= 2\,\overline{\delta(h_0)}\cdot\overline{\widetilde{w}h_0} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\,\overline{\Delta h_0^2}}}\cdot\overline{\widetilde{w}\,h_0} \end{aligned} \tag{A.33}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\overline{\widetilde{w}\,h_0} &= \overline{h_2\,h_0} - \widetilde{d}\;\overline{h_0\,\mathrm{sign}(h_0)} \\
&= \frac{1}{4}\overline{S_2\,S_0} - \widetilde{d}\;\overline{|h_0|} \\
&= \frac{1}{4}\overline{\mathrm{sign}(z+d_1)} - \widetilde{d}\;\overline{|h_0|} \\
&= \mathrm{erf}\Big(\frac{d_1}{\sqrt{2\,\overline{\Delta z^2}}}\Big) - \frac{\widetilde{d}}{\sqrt{2\pi}}\,. \qquad \text{(A.34)}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde h_1 in der Form von Gleichung (A.28) eingesetzt. Aus den Gleichungen (A.31) bis (A.34) ergeben sich nun nach elementarer Rechnung die Parameter von $P_2(h)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{d} &= 0.27576\,, \\
\rho &= 0.61854\,, \\
\overline{\Delta\widetilde{w}^2} &= 0.09167\,.
\end{aligned}$$

Eine Abbildung von $P_2(h)$ findet sich zusammen mit vergleichenden numerischen Daten im Haupttext.