
Anhang C: Dynamische Kenngrößen

Die pseudoinverse Kopplungsmatrix und die Perceptron-Matrix stimmen in wichtigen Kenngrößen der Dynamik im wesentlichen überein, sodaß gleiches dynamisches Verhalten beider Matrizen zu erwarten ist.

C.1 Eichtransformationen der Dynamik

Die Dynamik eines Neuronalen Netzwerkes, definiert durch

$$S_i(t+1) = \text{sign} \left(\sum_j J_{ij} S_j(t) \right),$$

ist invariant gegenüber einer Eichtransformation, die durch einen beliebigen binären Vektor $\zeta_i = \pm 1$ parametrisiert ist. Deshalb können nur gegenüber dieser Transformation invariante Größen der Kopplungsmatrizen dynamisch relevante Parameter der Kopplungsmatrizen sein.

Die Eichtransformation wird durch den Übergang von Variablen S_i zu neuen Variablen σ_i mit

$$S_i \rightarrow \sigma_i = S_i \zeta_i$$

definiert [KR88]. Damit sich das dynamische Verhalten des Netzwerkes nicht ändert, muß die Kopplungsmatrix ebenfalls transformiert werden:

$$J_{ij} \rightarrow \tilde{J}_{ij} = \zeta_i J_{ij} \zeta_j$$

In der Tat gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma_i(t+1) &= \text{sign} \left(\sum_j \tilde{J}_{ij} \sigma_j(t) \right) \\ &= \text{sign} \left(\sum_j \zeta_i J_{ij} \zeta_j \sigma_j(t) \right) \end{aligned}$$

oder, nach Multiplikation mit ζ_i ,

$$\begin{aligned} \zeta_i \sigma_i(t+1) &\equiv S_i(t) \\ &= \text{sign} \left(\sum_j J_{ij} \zeta_j \sigma_j(t) \right) \equiv \text{sign} \left(\sum_j J_{ij} S_j(t) \right) \end{aligned}$$

Dynamisch gesehen verhalten sich also ursprüngliche und transformierte Kopplungsmatrizen äquivalent. Nur eichinvariante Größen von Kopplungsmatrizen können für die Dynamik des Neuronales Netzes relevant sein. Dies sind alle aus J_{ij} gebildeten Größen, in denen Parametervektor ζ_i quadratisch auftritt, also Größen wie

$$\sum_{j,k,\dots,m} J_{ij} J_{jk} \dots J_{mi}$$

oder

$$\sum_{j,k,\dots,m} \xi_i^\mu J_{ij} J_{jk} \dots J_{mn} \xi_n^\mu$$

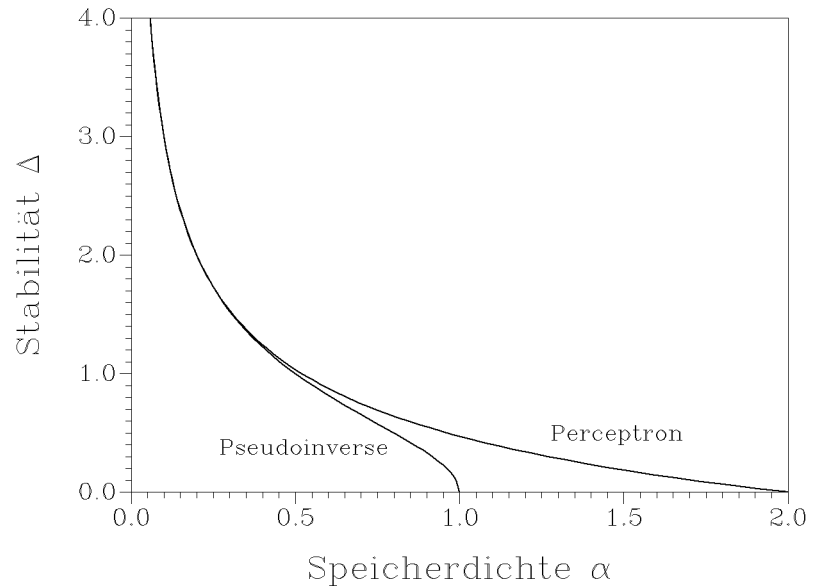


Abbildung C.1: Die Stabilitäten von Perceptron und pseudoinverser Kopplungsmatrix. Die Werte für beide Matrizen stimmen bei niedrigen α -Werten fast überein.

Sieht man einmal von den Diagonalelementen J_{ii} der Kopplungsmatrix ab, sind die einfachsten invarianten Kenngrößen die Stabilitäten der Muster, definiert durch

$$\Delta_i^\mu = \frac{\sum_j \xi_i^\mu J_{ij} \xi_j^\mu}{\sqrt{\sum_j J_{ij}^2}},$$

beziehungsweise die daraus abgeleitete Stabilität der Matrix,

$$\Delta = \min_{i,\mu} \Delta_i^\mu.$$

Eine weitere wichtige Invariante der Eichtransformation ist ferner die Symmetrie der Matrix, η , definiert durch

$$\eta = \frac{\sum_{i \neq j} J_{ij} J_{ji}}{\sum_{i \neq j} J_{ij}^2}.$$

Die Symmetrie mißt die symmetrischen ($J_{ij}^s = \frac{1}{2}(J_{ij} + J_{ji})$) und antisymmetrischen ($J_{ij}^a = \frac{1}{2}(J_{ij} - J_{ji})$) Anteile der Kopplungsmatrix:

$$\eta = \frac{\sum_{i \neq j} (J_{ij}^s)^2 - \sum_{i \neq j} (J_{ij}^a)^2}{\sum_{i \neq j} J_{ij}^2}.$$

Für eine symmetrische Matrix gilt damit klarerweise $\eta = 1$, während für eine antisymmetrische Matrix mit $J_{ij} = -J_{ji}$ der Symmetrieparameter η den Wert -1 annimmt. Die Ergebnisse bei der Analyse des 'one-pattern'-Modells [KR88] legen nahe, daß diese einfachen Invarianten die Attraktionsgebiete der Muster bereits im wesentlichen festlegen. Komplexere Invariante scheinen auf Attraktionsgebiete nur kleine Auswirkungen zu haben.

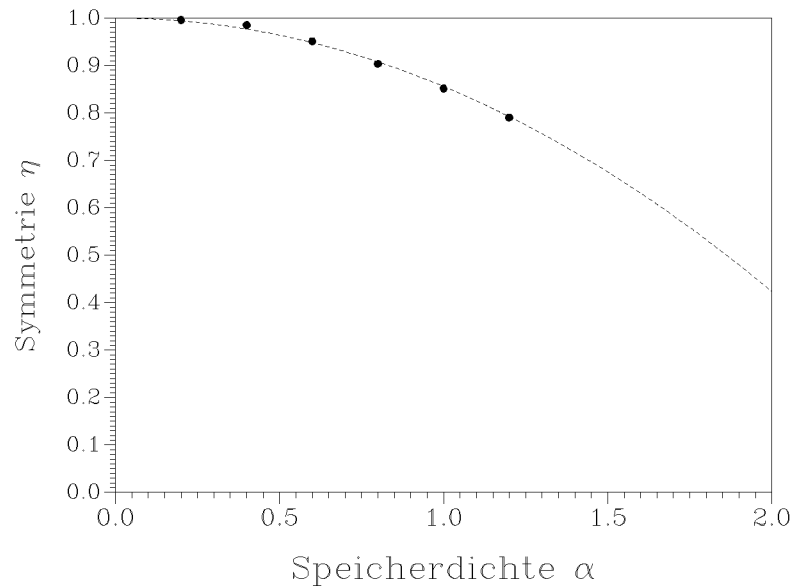


Abbildung C.2: Die Symmetrie der Perceptron-Matrix als Funktion der Speicherdichte α . Die gestrichelte Linie ist ein Fit zu den numerischen Daten (50 Neuronen, Mittelung über 20 Systeme).

C.2 Vergleich von pseudoinverser Kopplungsmatrix und Perceptron-Matrix

Betrachten wir nun die beiden elementaren Invarianten, Δ und η , für die pseudoinverse Kopplungsmatrix und die Perceptron-Matrix. Für die Pseudoinverse berechnen sich die Stabilitäten der Muster zu (vergl. Anhang B)

$$\Delta = \frac{\overline{h_i \xi_i^\mu}}{\sum_j J_{ij}^2} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

Die Stabilität des Percpetrons erhält man aus der Formel [GA88]

$$\alpha \int_{-\Delta}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} (z + \Delta)^2 \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = 1$$

Wie Abbildung C.1 zeigt, sind die Stabilitäten beider Matrizen im niedrigen α -Bereich nicht wesentlich voneinander verschieden. Bei der Symmetrie η der Matrix zeigt sich ein ähnliches Bild. Die pseudoinverse Kopplungsmatrix ist ja eine symmetrische Matrix, aber die Perceptron-Matrix stellt eine an sich nicht-symmetrische Matrix dar. Wie die numerischen Daten von Abbildung C.2 zeigen, bleibt der antisymmetrische Anteil zumindest im niedrigen α -Bereich klein. Dies liegt möglicherweise an der Tatsache, daß die Percpetron-Matrix, Zeile für Zeile, identisch der pseudoinversen Kopplungsmatrix für eine Untermenge der zu lernenden Muster ist. Welche Muster gelernt werden, variiert dabei von Zeile zu Zeile und sorgt für die Asymmetrie der Perceptron-Matrix. Der Anteil der nichtgelernten Muster bleibt aber für alle α -Werte relativ gering (ca. 32% bei $\alpha = 1.0$, 50% bei $\alpha = 2.0$ [OP89]).

Wegen der weitgehenden Ähnlichkeit beider Matrizen ist ein ähnliches dynamisches Verhalten zu erwarten. Zumindest für die Attraktionsgebiete beider Matrizen wurde dies mittlerweile durch numerische Simulationen bestätigt [KR90].